

---

# Mecánica de Materiales II: Análisis de Esfuerzos

Andrés G. Clavijo V., Universidad Simón Bolívar

# Contenido



- Introducción



- Vector esfuerzo

- Fuerzas de volumen
- Convención de signos



- Matriz de esfuerzos



- Teorema de Cauchy



- Esfuerzos principales – Estado Triaxial

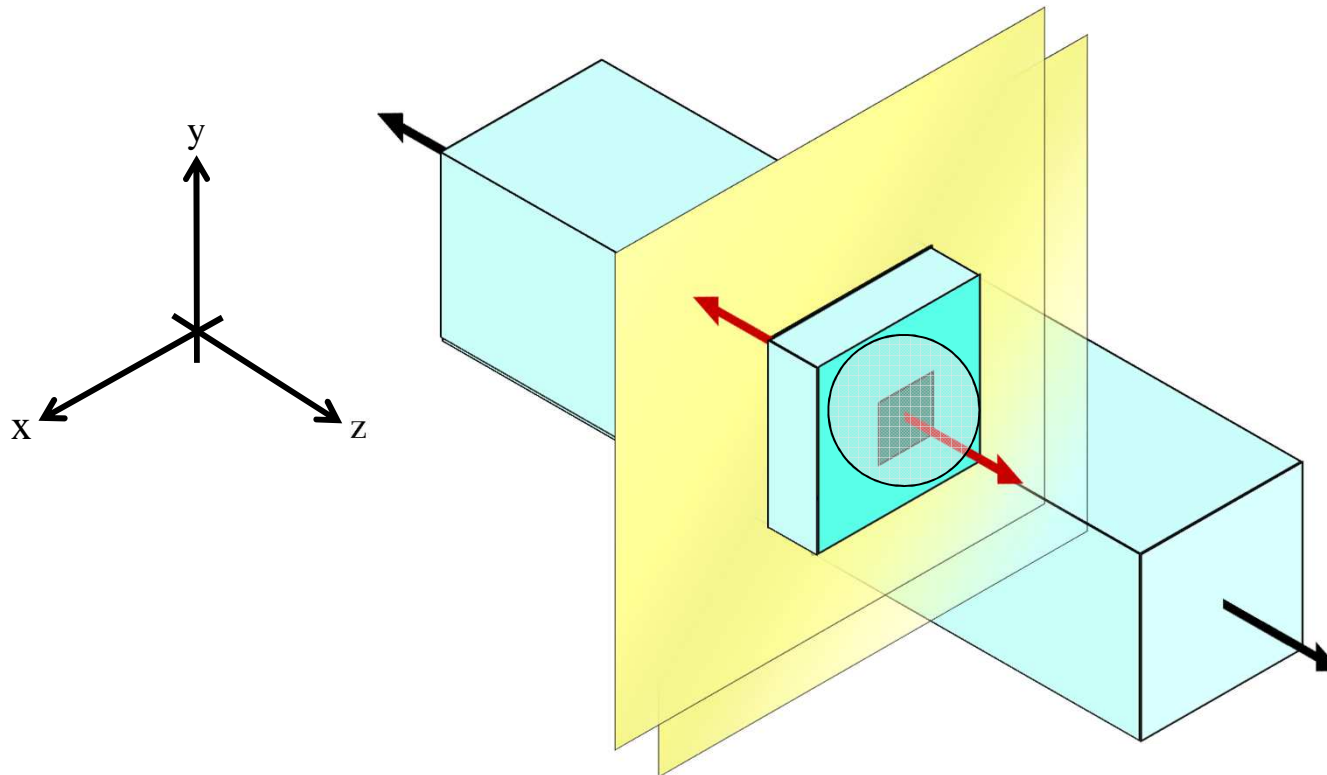
- Circulo de Mohr – Método gráfico



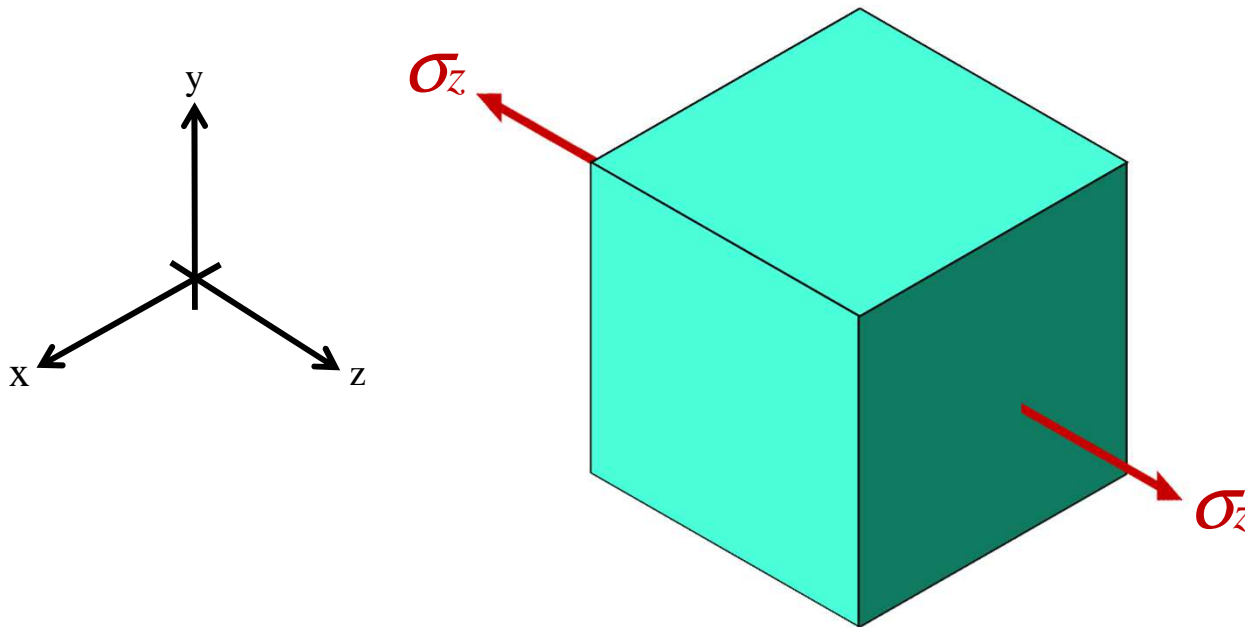
- Estado plano de esfuerzos

- Circulo de Mohr - Reglas de correspondencia
- Circulo de Mohr - Método gráfico

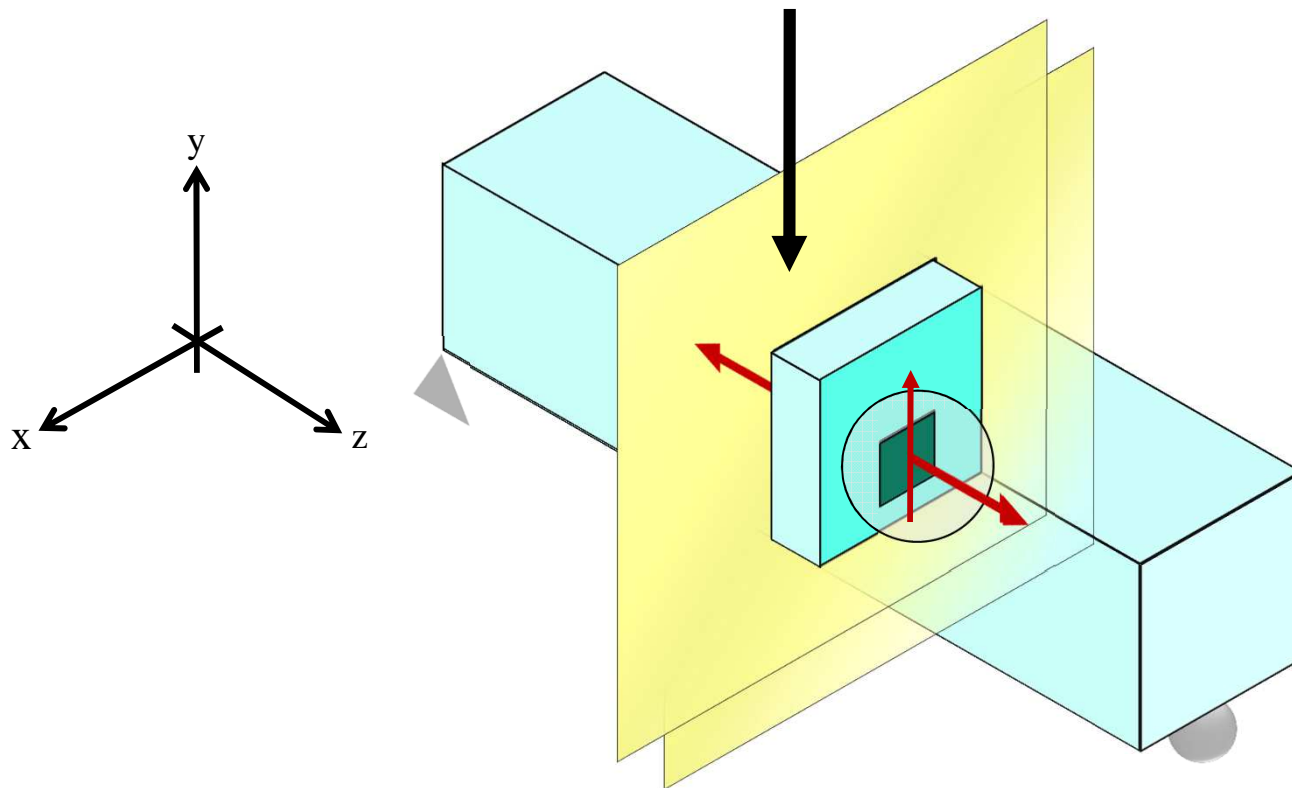
Supongamos una barra sometida a carga axial únicamente



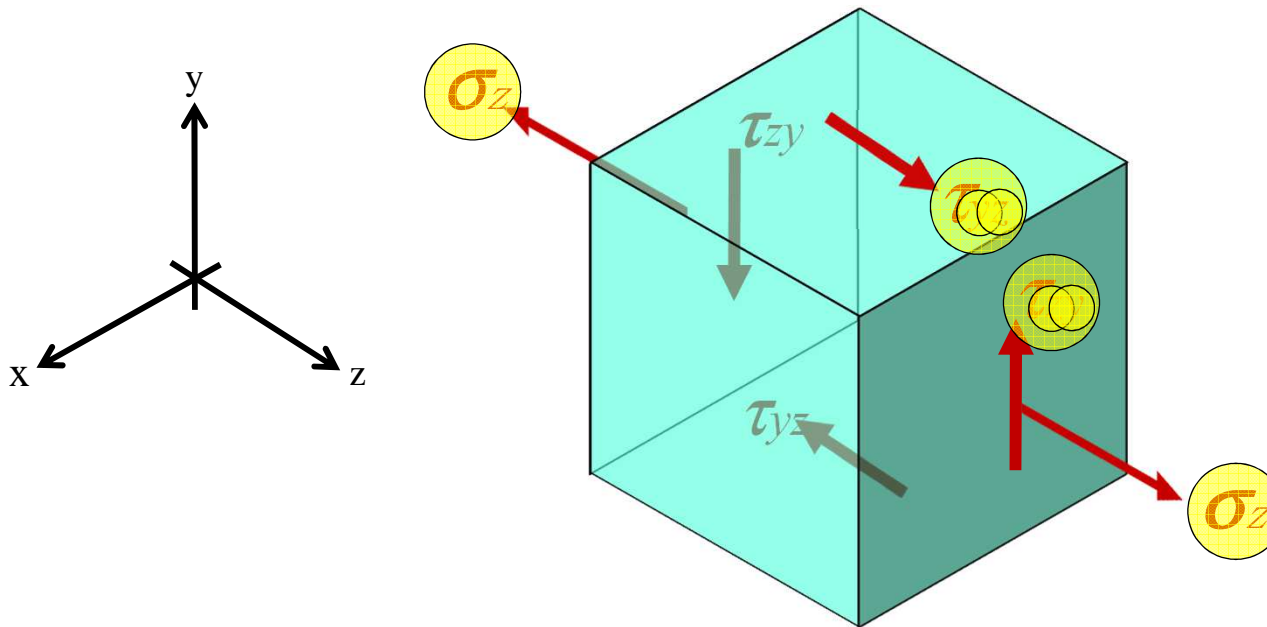
En los planos utilizados y señalados, un pequeño fragmento de la viga, podemos concluir que todos los puntos están sometidos a tracción



Supongamos ahora una barra apoyada en sus extremos y sometida a una carga cortante.



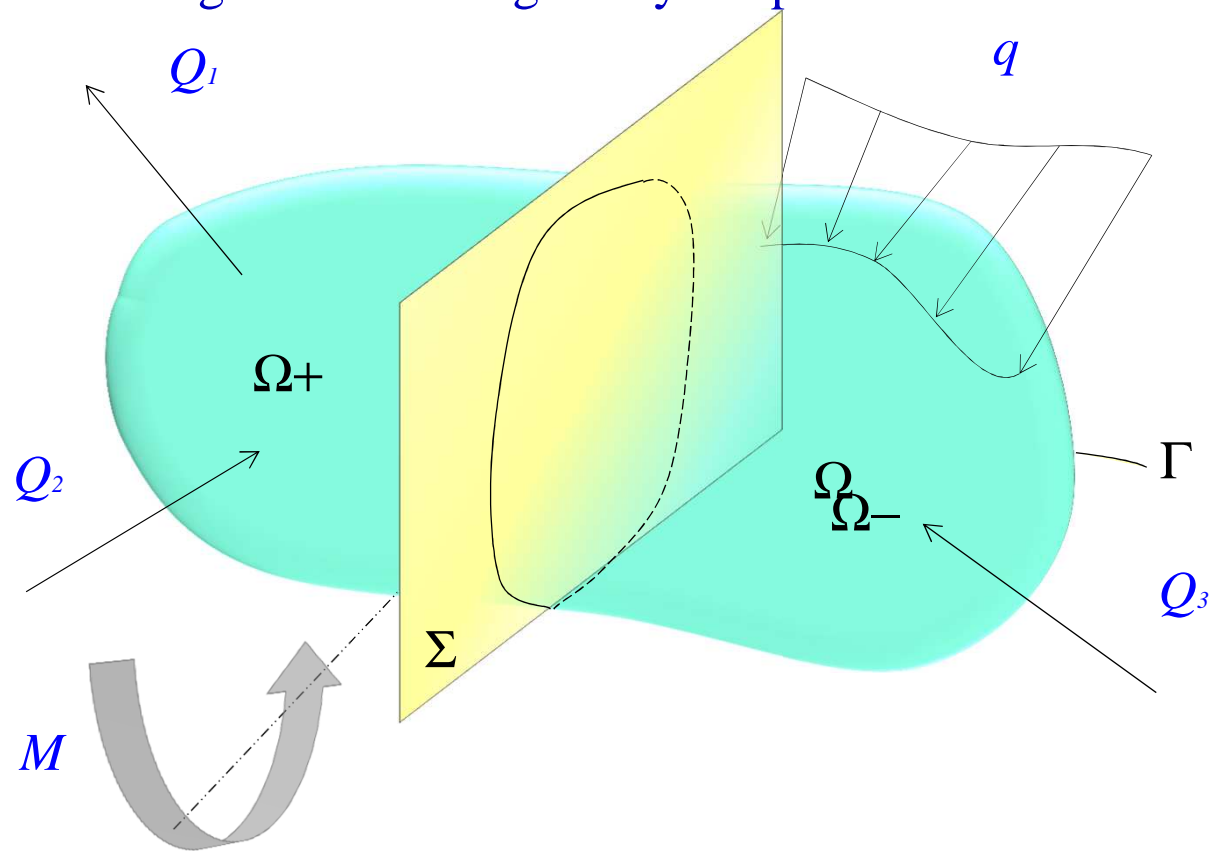
En un elemento diferencial de un sólido se tiene: aparecen esfuerzos cortantes



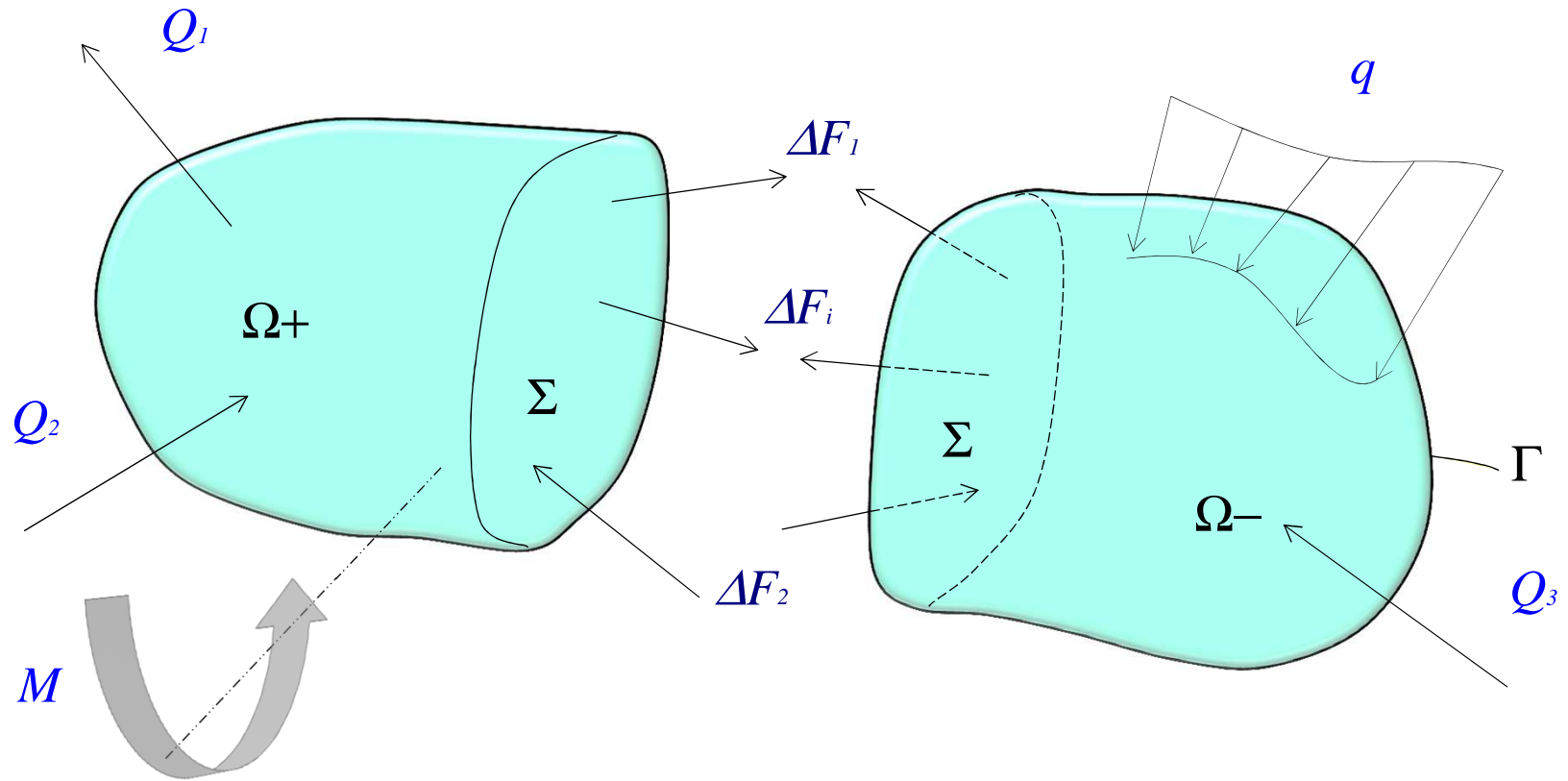
Los **esfuerzos tangenciales** se identifican según:

- Orientación del plano sobre el cual actúan
- Orientación del propio esfuerzo

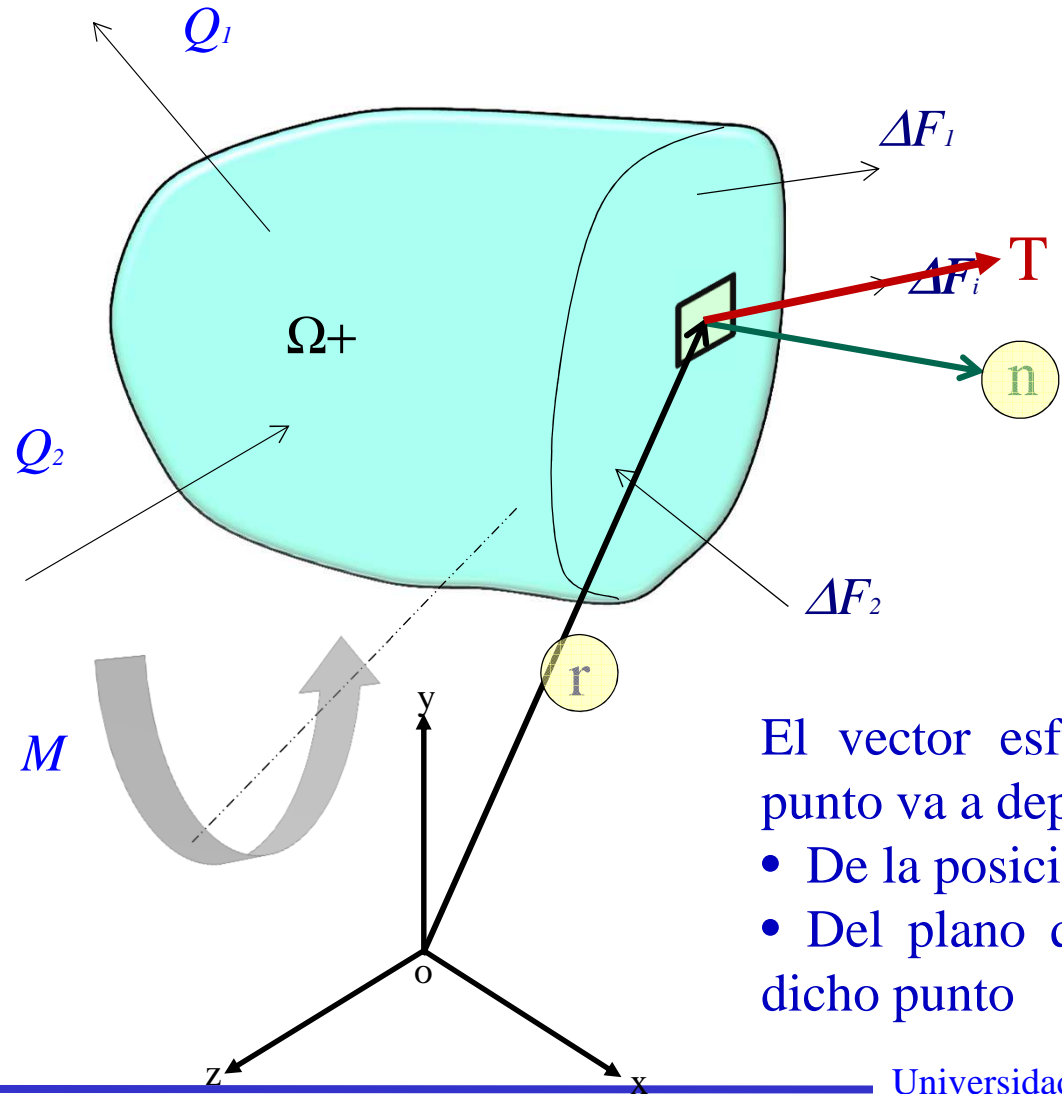
**Hipótesis 1:** El material es homogéneo y ocupa todo el volumen



- Fuerzas de superficie
- Fuerzas de volumen







$$\bar{T} = f(\bar{r}, \hat{n})$$

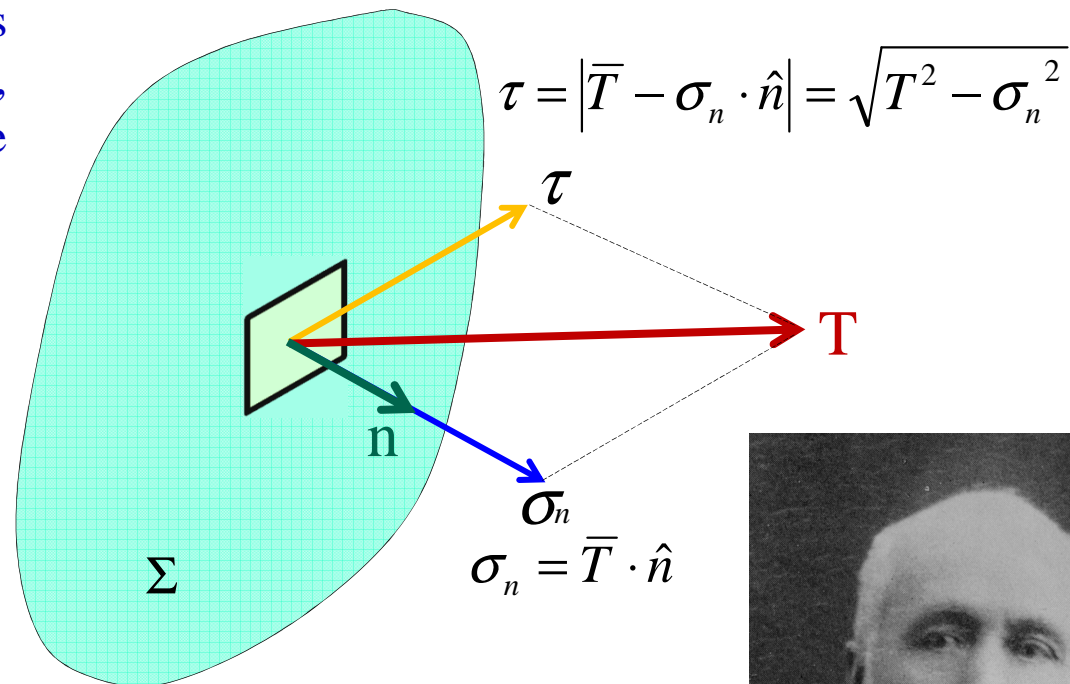
$$\bar{T} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta A} \right) = \frac{d\bar{F}}{dA}$$

El vector esfuerzo en un punto va a depender:

- De la posición y
- Del plano que pasa por dicho punto

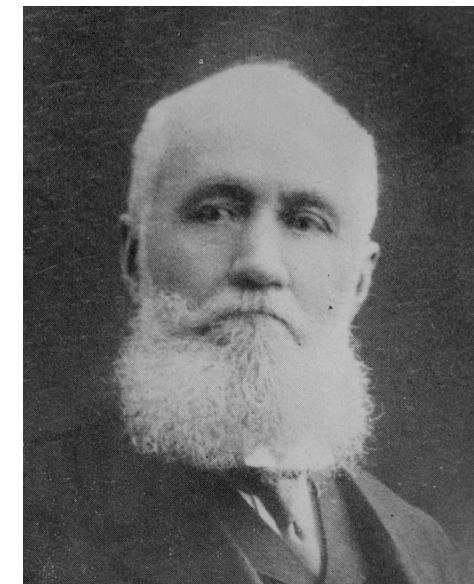
El vector esfuerzo no es perpendicular al plano, por lo que se puede descomponer en:

- Esfuerzo normal
- Esfuerzo tangencial



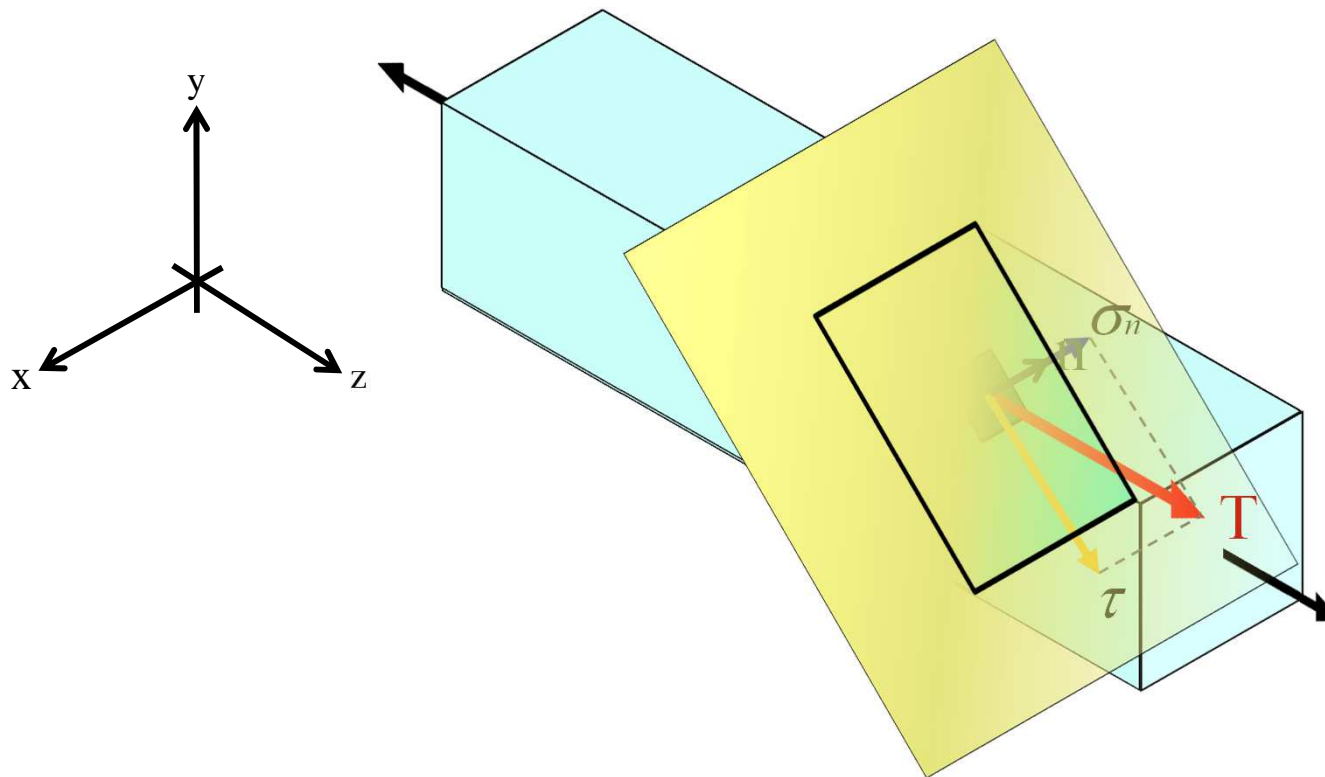
Augustine-Louis  
Cauchy (1789-1857)

El vector esfuerzo surge de la generalización del concepto de presión en Mecánica de los fluidos (Cauchy, 1822). Tal y como se presenta acá se debe al Ingeniero Saint-Venant

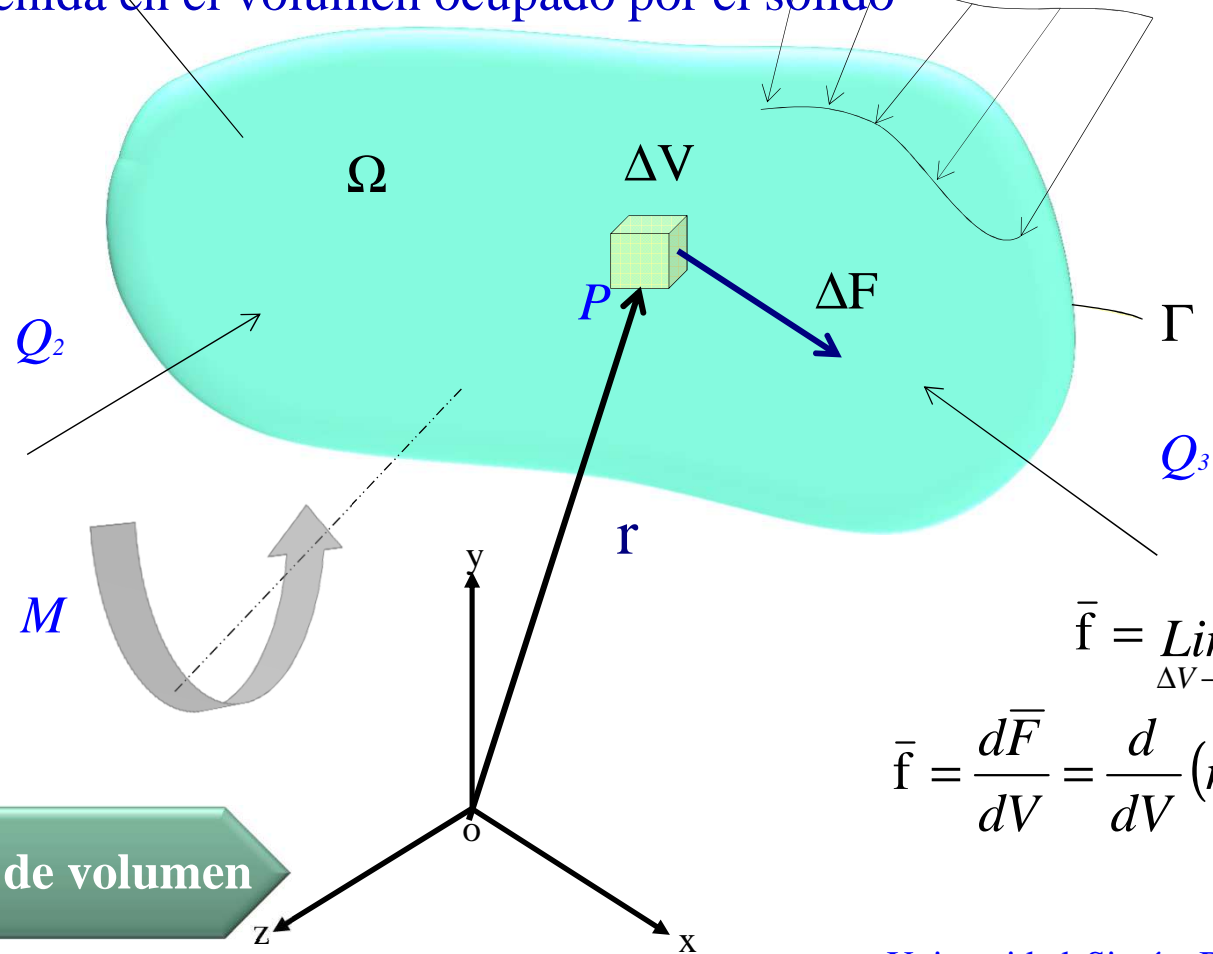


Barré de Saint-  
Venant (1797-1886)

Volvamos al caso de la barra sometida a carga axial únicamente y utilicemos un plano inclinado para seccionar la viga



Son aquellas  $Q_i$  cuya magnitud es proporcional a la masa contenida en el volumen ocupado por el sólido



$$\bar{\mathbf{f}} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \bar{\mathbf{F}}}{\Delta V} \right) = \frac{d\bar{\mathbf{F}}}{dV}$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \frac{d\bar{\mathbf{F}}}{dV} = \frac{d}{dV} (m \cdot \bar{\mathbf{g}}) = \bar{\mathbf{g}} \cdot \frac{dm}{dV}$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \rho \cdot \bar{\mathbf{g}}$$

**Fuerzas de volumen**



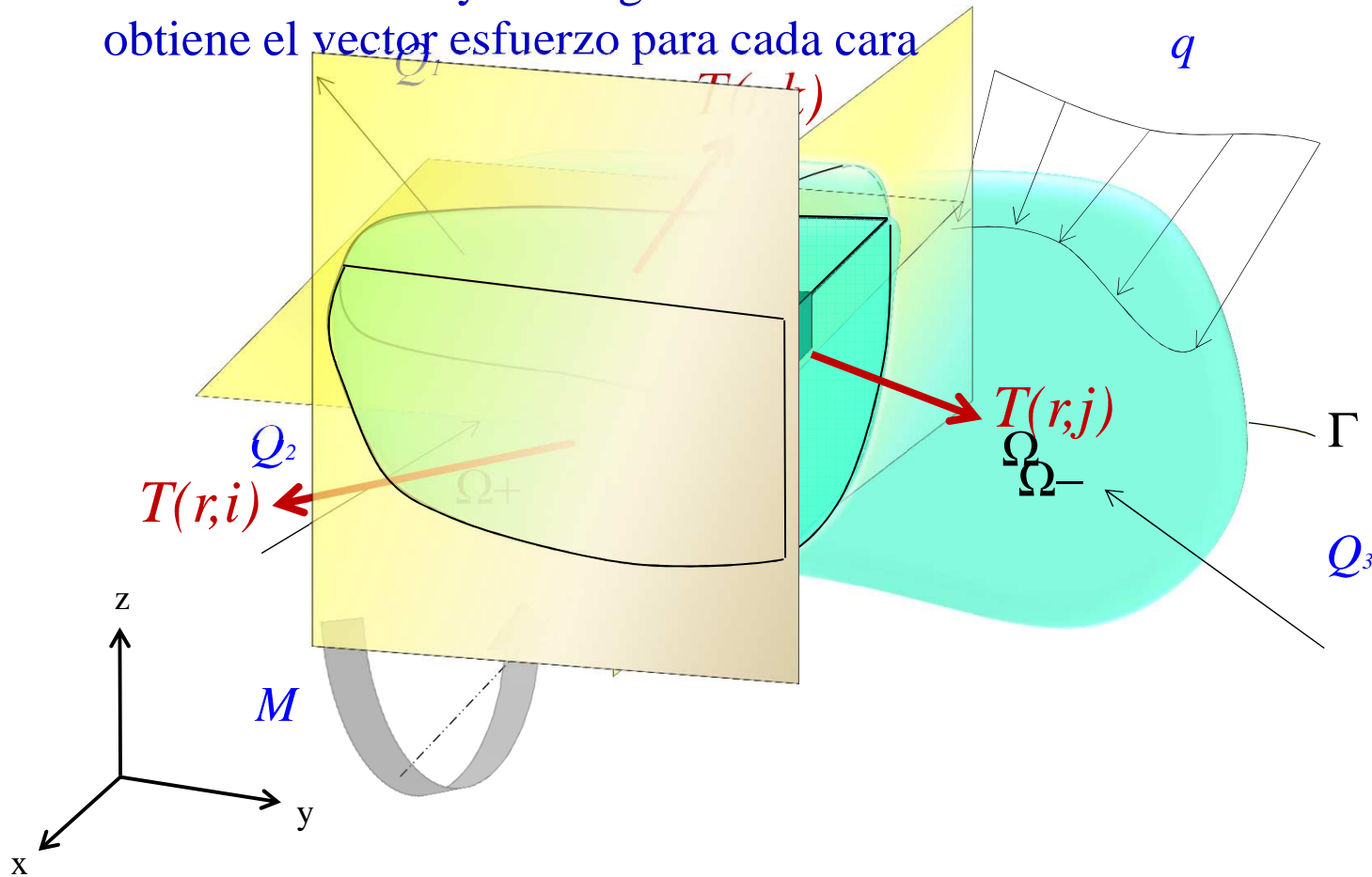
**Planos:** se consideran positivos, si su normal (saliente del elemento de volumen) apunta a la dirección positiva de un eje coordenado.

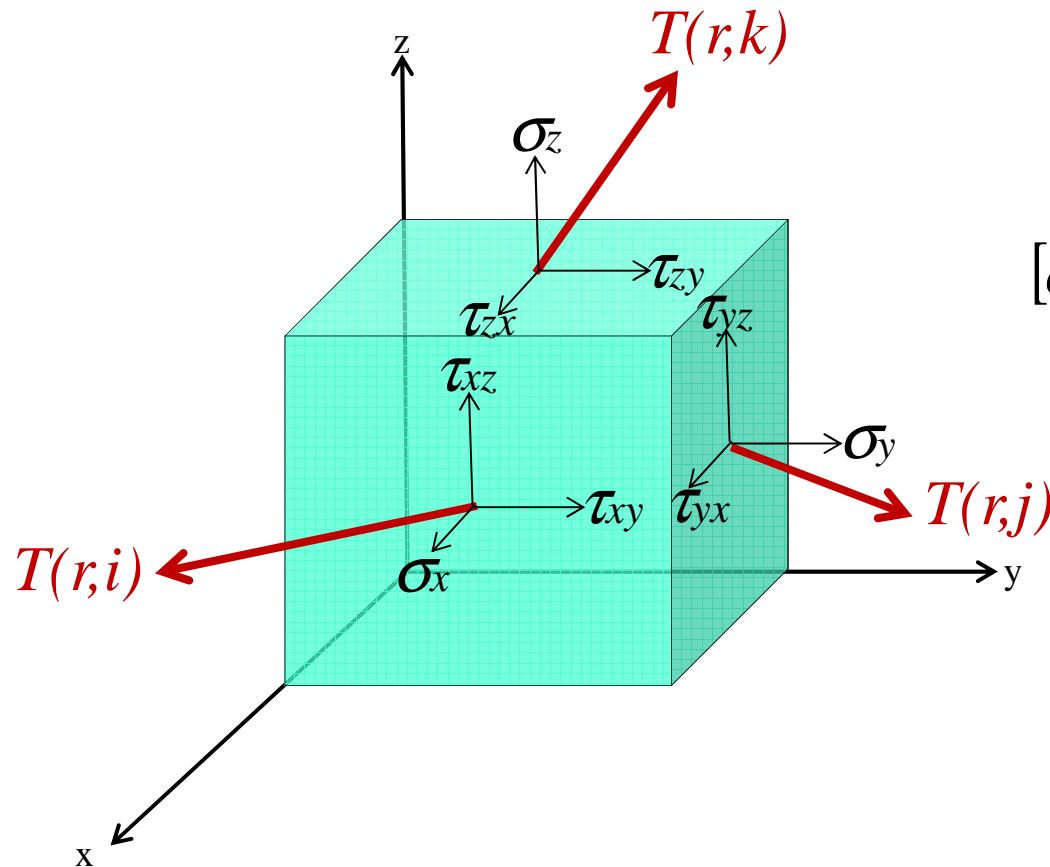
**Esfuerzos normales:** se considera positivo si es de tracción y negativo si es de compresión.

**Esfuerzos tangenciales:** son positivos si, actuando en un plano positivo (o negativo), apunta en la dirección positiva (o negativa) de un eje coordenado. El caso contrario, son negativos

Convención de signos

Al cortar el cuerpo y definir un sistema de coordenadas en el origen, se obtiene el vector esfuerzo para cada cara





$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

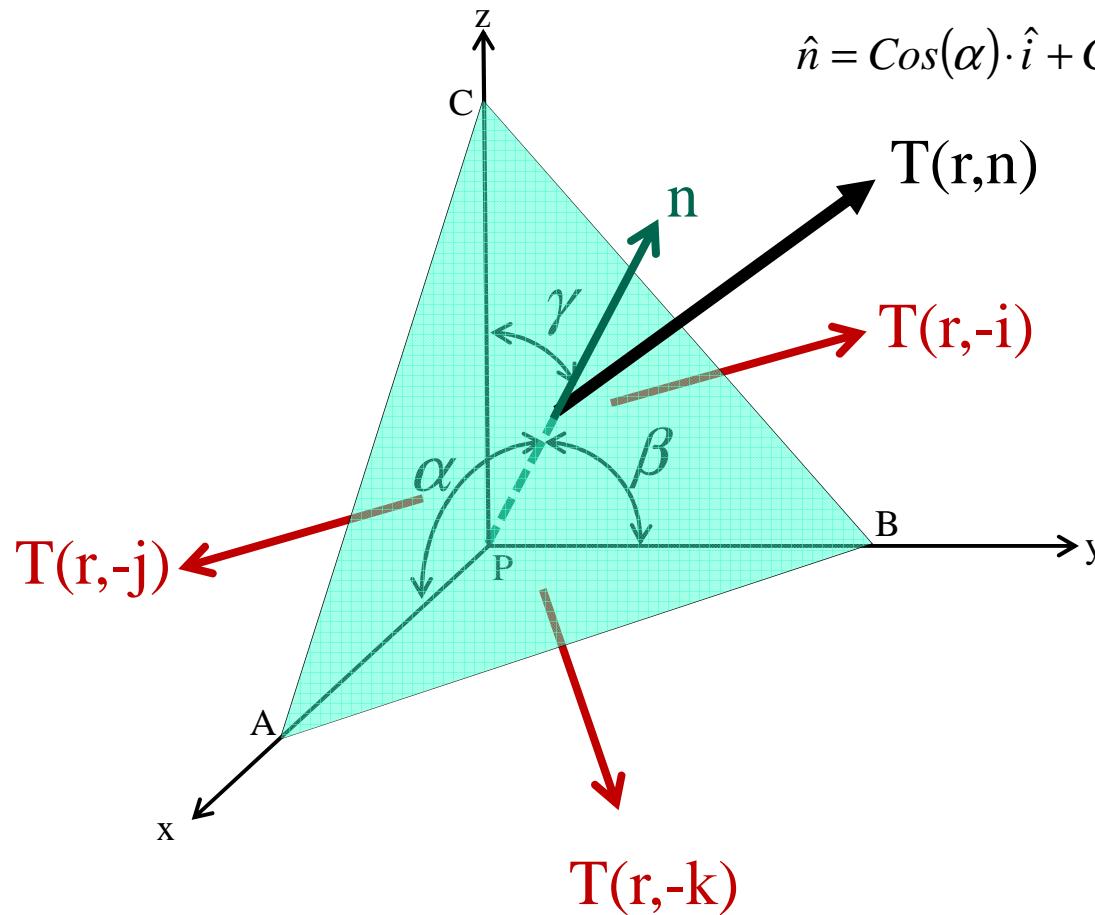
$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\bar{T}(\bar{r}, \hat{i}) \\ &\bar{T}(\bar{r}, \hat{j}) \\ &\bar{T}(\bar{r}, \hat{k}) \end{aligned}$$

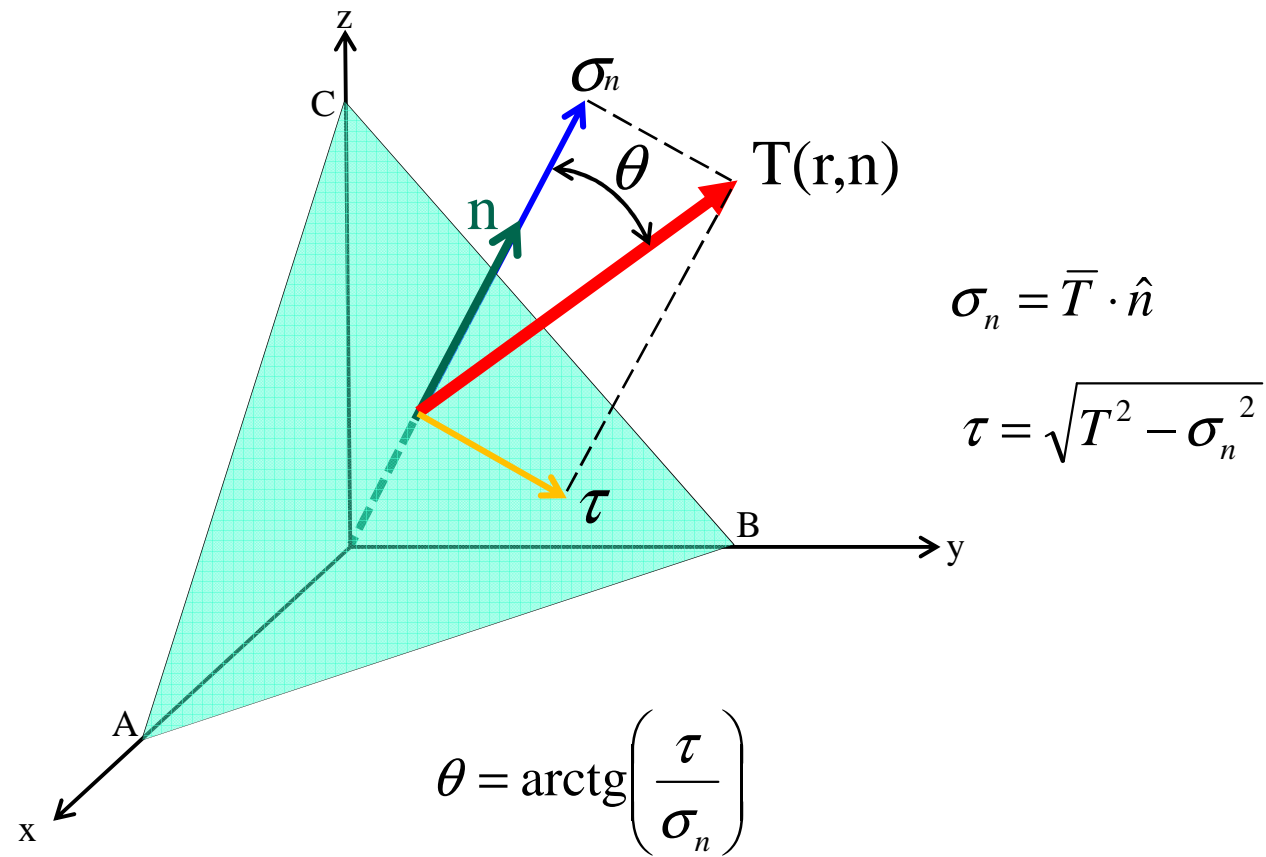
$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

$$\hat{n} = \cos(\alpha) \cdot \hat{i} + \cos(\beta) \cdot \hat{j} + \cos(\gamma) \cdot \hat{k}$$

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) \end{bmatrix}$$







Introducción

Vector  
esfuerzo

Matriz de  
esfuerzos

Teorema  
de Cauchy

**Esfuerzos  
principales**

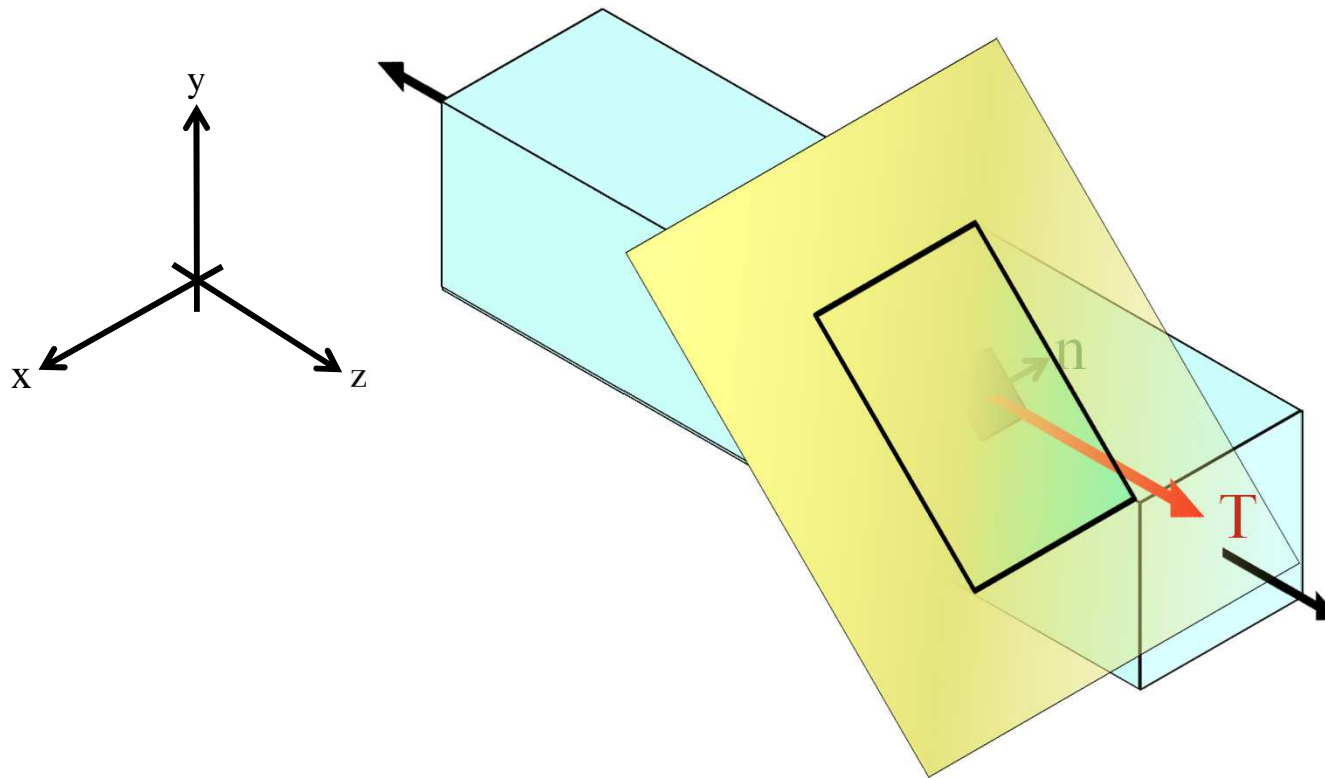
Estado plano  
de esfuerzos

Una vez conocidos los esfuerzos en un punto a través de la matriz de esfuerzos, es necesario compararlo con una **Teoría de falla** (como veremos más adelante en el curso)

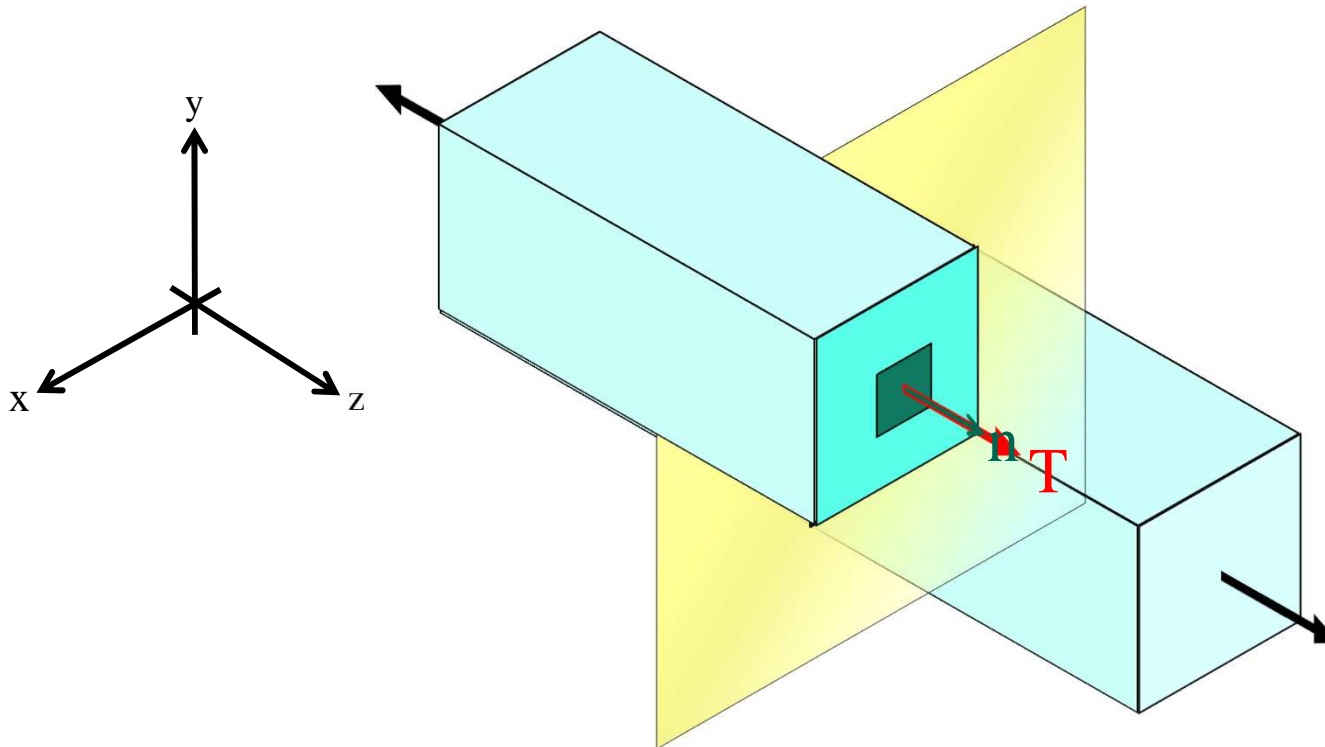
La mayoría de dichas teorías basan su formulación en el conocimiento de los valores extremos del esfuerzo normal, es decir valores máximos y mínimos.

Generalmente, el vector esfuerzo no es perpendicular al plano o paralelo a la normal  $\mathbf{n}$ . Sin embargo, existe la posibilidad en que el vector esfuerzo tenga la dirección de la normal.

Recordemos la viga a tracción:



Cuando el vector esfuerzo es perpendicular al plano, la componente tangencial desaparece, en ese momento, el vector esfuerzo se convierte en un esfuerzo principal



Por definición:

$$\bar{T}(r, \hat{n}) = [\sigma] \cdot \hat{n}$$

$$\bar{T}(r, \hat{n}) = \lambda \cdot [I] \cdot \hat{n}$$

$$\tau = 0$$

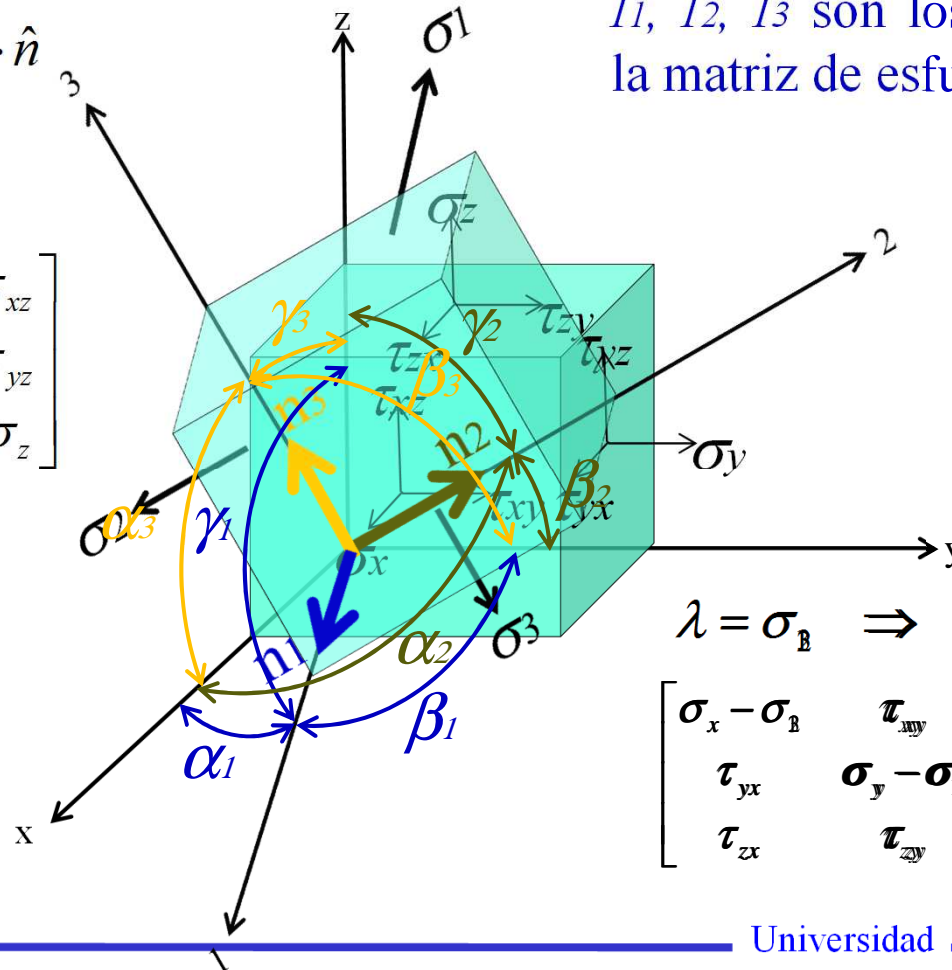
donde:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) \end{bmatrix}$$

$$\lambda^3 - I_1 \cdot \lambda^2 + I_2 \cdot \lambda - I_3 = 0$$

$I_1, I_2, I_3$  son los invariantes de la matriz de esfuerzos

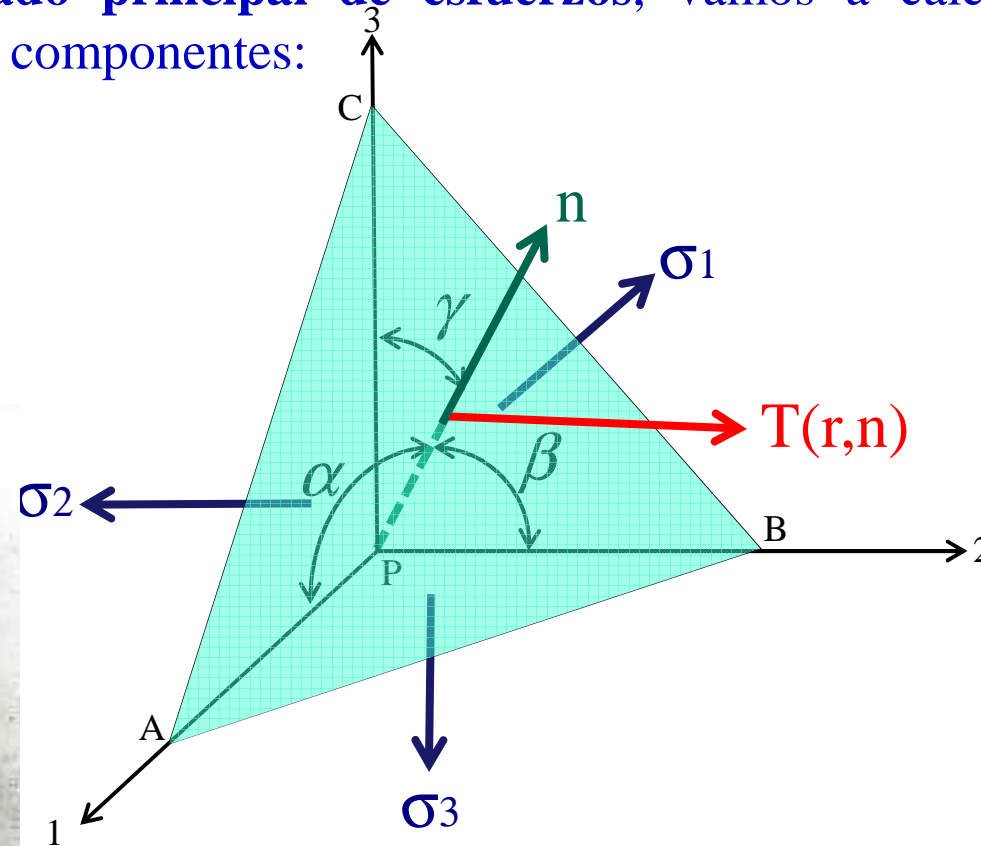


$$\begin{matrix} \sigma_1 \\ \lambda = \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{matrix}$$

$$\lambda = \sigma_E \Rightarrow \mathbf{n}_E = f(\alpha, \beta, \gamma)$$

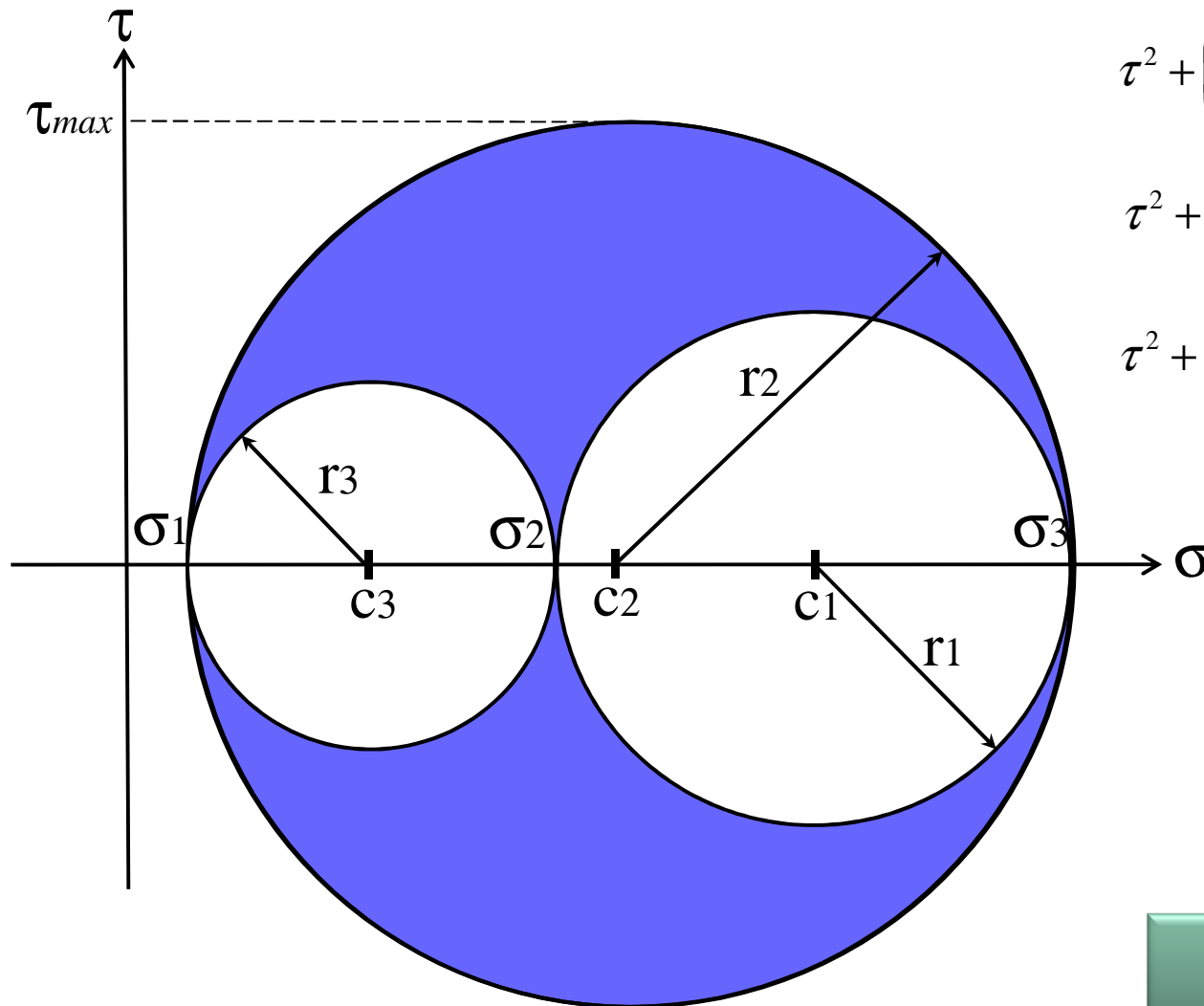
$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_E & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_E & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Dado un **estado principal de esfuerzos**, vamos a calcular el vector esfuerzo y sus componentes:



Christian Otto Mohr  
(1835-1918)

Circulo de Mohr



$$\tau^2 + \left( \sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 \geq \left( \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2} \right)^2$$

$$\tau^2 + \left( \sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 \geq \left( \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2$$

$$\tau^2 + \left( \sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 \geq \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \right)^2$$

$$y^2 + (x - c)^2 \geq r^2$$

$$c_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \quad r_1 = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}$$

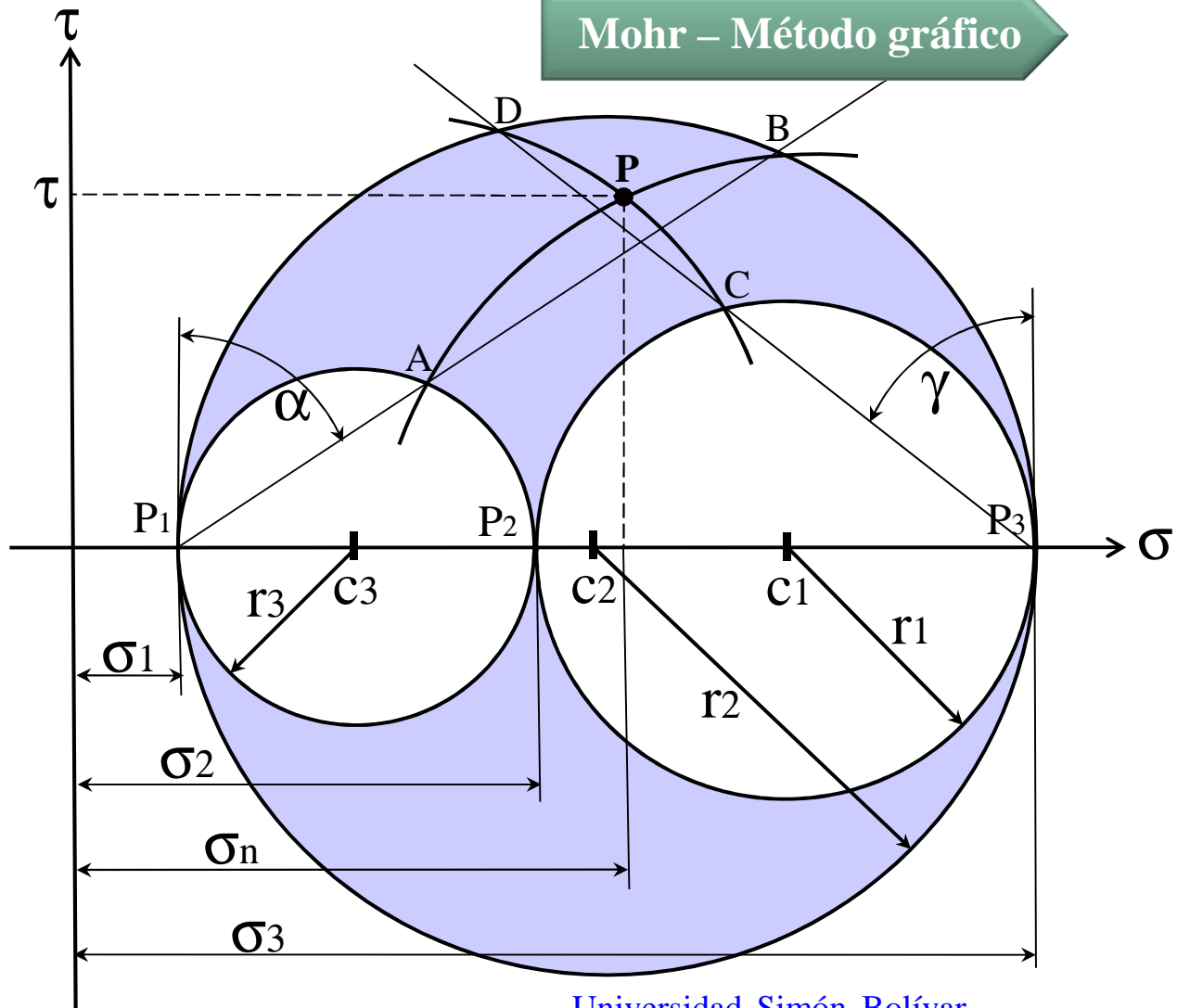
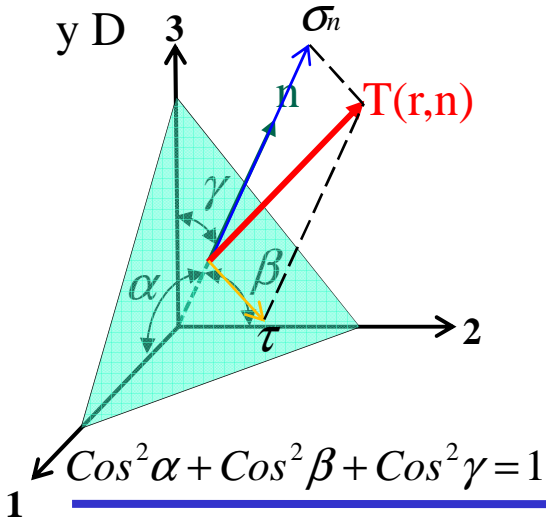
$$c_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad r_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$$

$$c_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad r_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$$

**Circulo de Mohr**

Mohr – Método gráfico

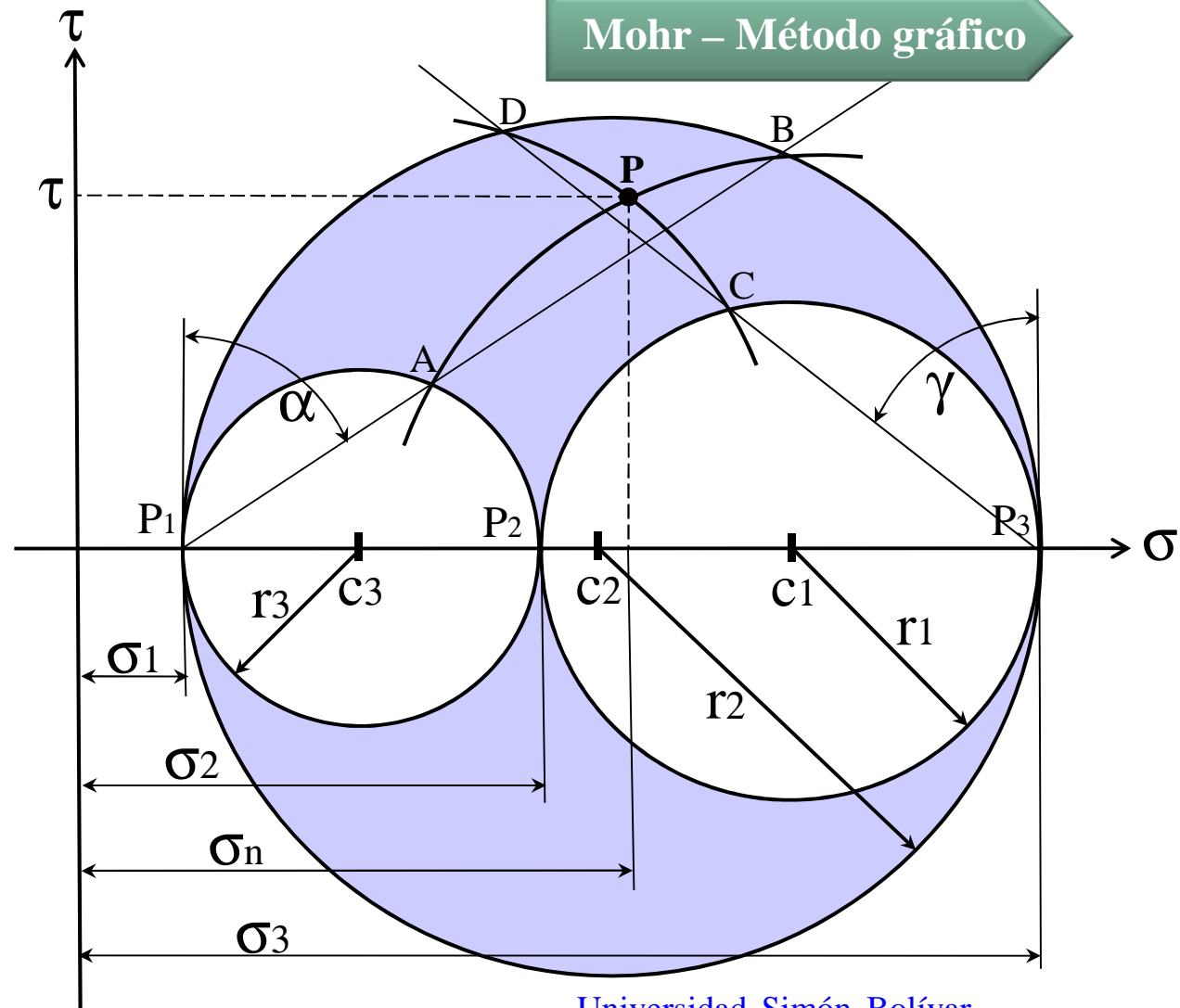
• Sean  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  los esfuerzos principales que actúan sobre las caras de un elemento diferencial de un cuerpo. El ángulo  $\alpha$  que forma el eje  $\sigma_1$  con el eje  $\sigma_3$  es el ángulo principal  $\alpha$ . El ángulo  $\beta$  que forma el eje  $\sigma_2$  con el eje  $\sigma_3$  es el ángulo principal  $\beta$ . El ángulo  $\gamma$  que forma el eje  $\sigma_1$  con el eje  $\sigma_2$  es el ángulo principal  $\gamma$ . El ángulo  $\alpha$  que forma el eje  $\sigma_1$  con el eje  $\sigma_3$  es el ángulo principal  $\alpha$ . El ángulo  $\beta$  que forma el eje  $\sigma_2$  con el eje  $\sigma_3$  es el ángulo principal  $\beta$ . El ángulo  $\gamma$  que forma el eje  $\sigma_1$  con el eje  $\sigma_2$  es el ángulo principal  $\gamma$ .



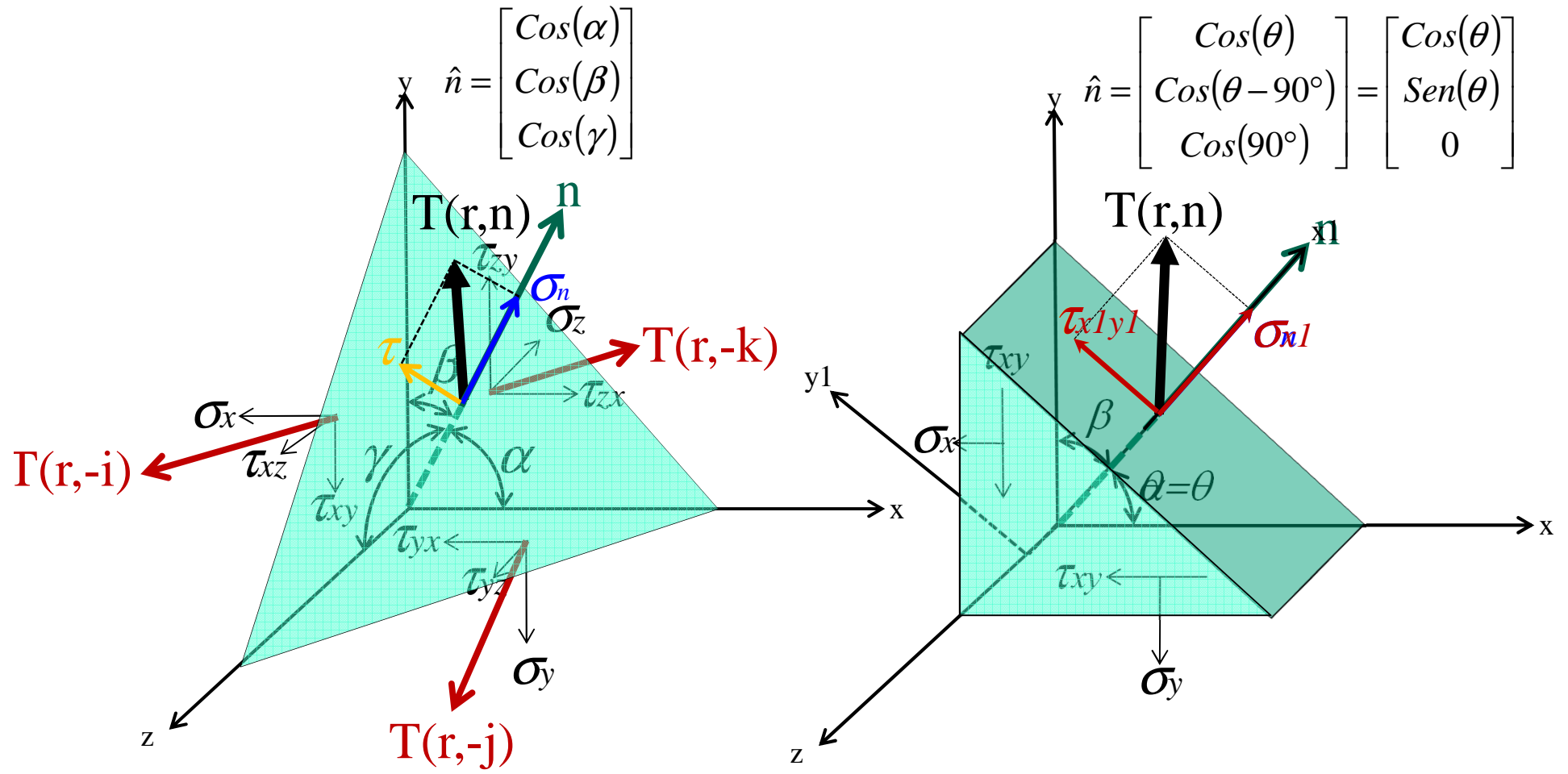


## Mohr – Método gráfico

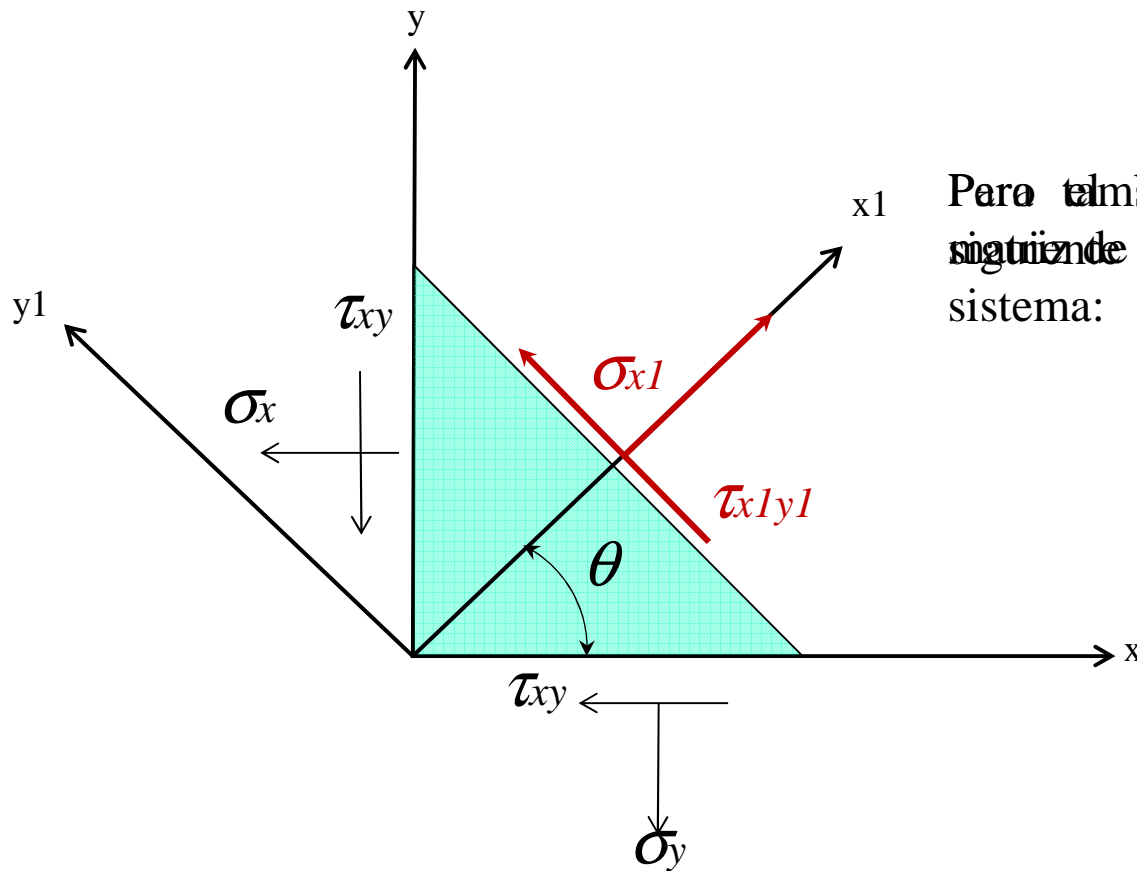
- **Análisis de los círculos de Mohr** para determinar los esfuerzos principales y el ángulo de inclinación de los ejes principales. El ángulo  $\alpha$  que forma el eje principal de esfuerzos  $I_1$  con el eje de las abscisas es el mismo que el ángulo  $\gamma$  que forma la normal del plano con el eje principal  $I_1$ .







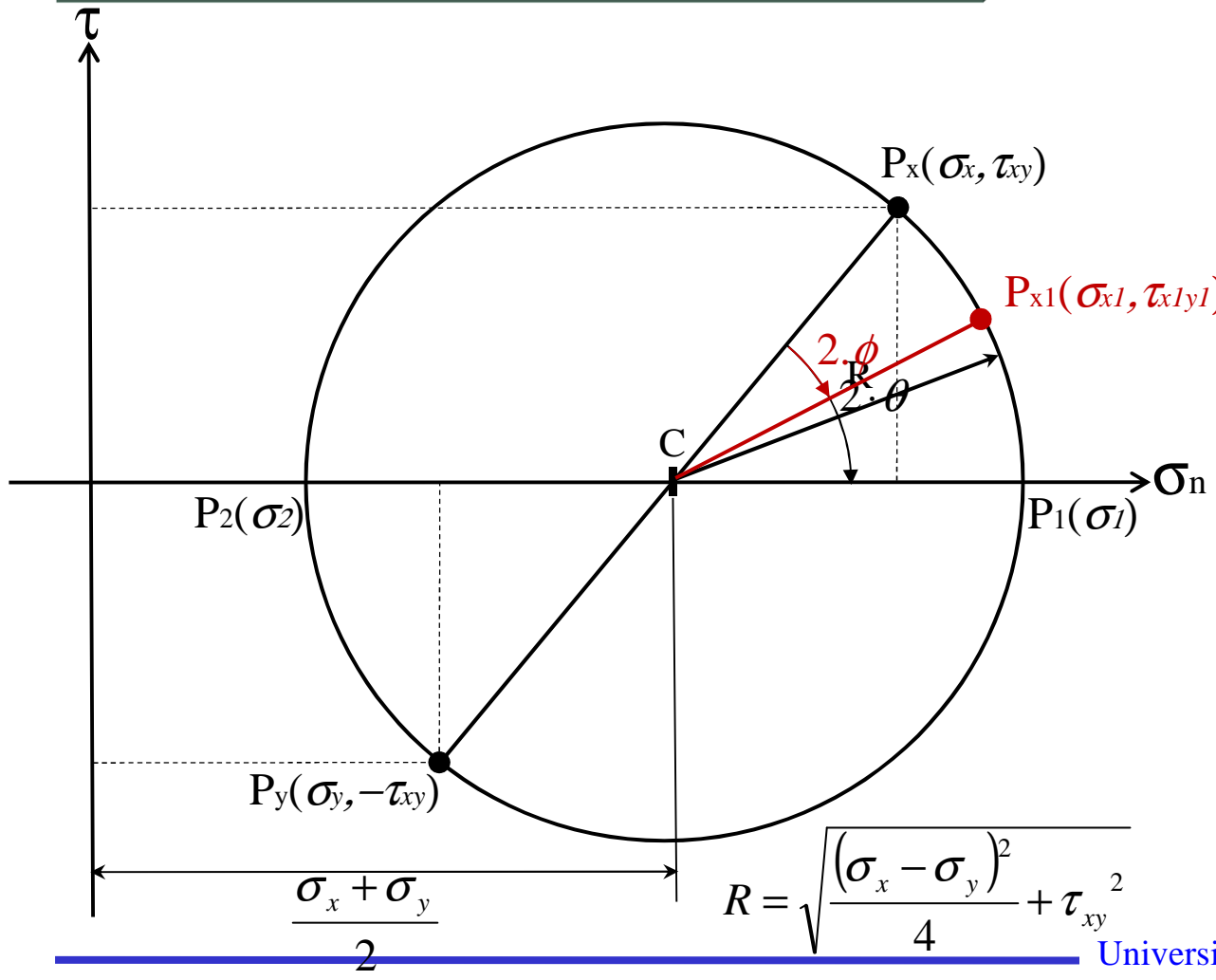
Viste desde el plano XY, se tiene:



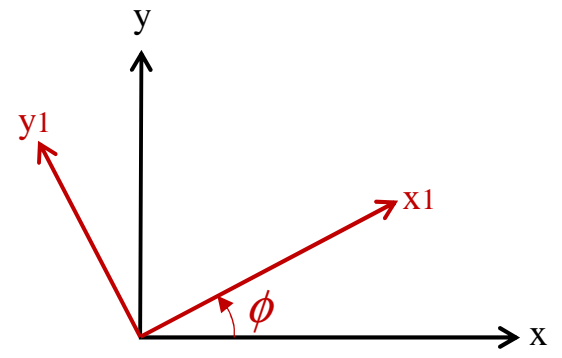
Para también puede presentar la siguiente matriz de esfuerzos dependiendo del sistema:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

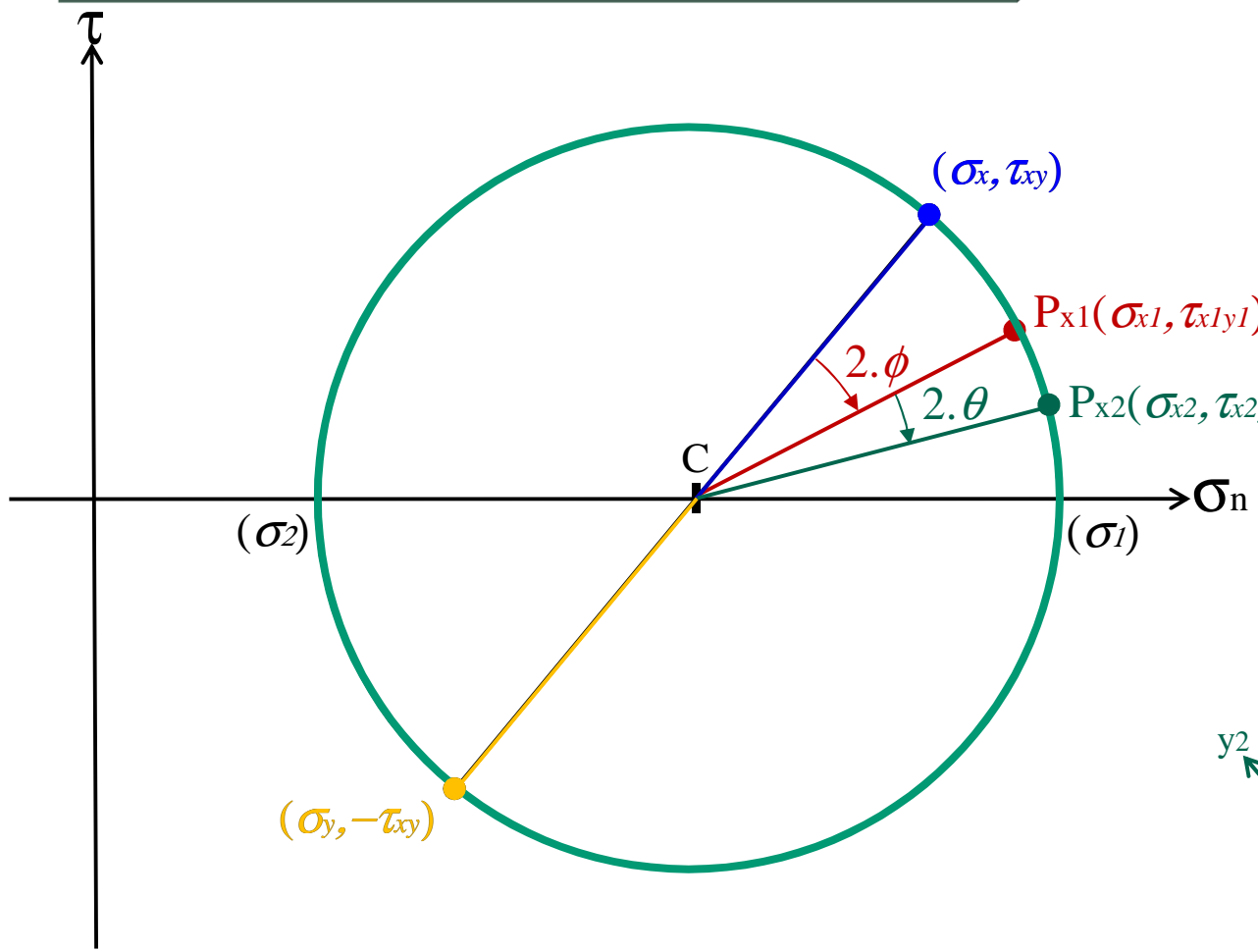
**Circulo de Mohr – Método gráfico**



El círculo de Mohr es una herramienta gráfica para determinar los esfuerzos principales y las direcciones de los ejes principales a partir de un estado de esfuerzos plano. Se comienza con un punto  $P_x$  en el círculo que representa el estado de esfuerzos en una cara. Al girar un ángulo  $2\phi$  en sentido horario en el círculo de Mohr, se llega a un punto  $P_{x1}$  en el eje horizontal, que representa el esfuerzo principal  $\sigma_{x1}$ .



**Circulo de Mohr – Reglas de correspondencia**



- En el plano  $X_1Y_1$  los ángulos  $\theta$  positivos en sentido horario se representan por  $\tau_{x_1y_1}$  en la circunferencia de Mohr.
- En el plano  $X_2Y_2$  los ángulos  $\theta$  negativos en sentido horario se representan por  $\tau_{x_2y_2}$  en la circunferencia de Mohr.

